Correction de la CALORIE

Julien Reichert

Question 1

Dans la mesure où toutes les multiplications effectuées ne concernent que les caractères de A à F de l'hexadécimal, on peut commencer par écrire des tables de multiplication de 11×11 à 15×15. Bien entendu, on utilise la symétrie pour gagner du temps.

En décimal :

	10	11	12	13	14	15
10	100	110	120	130	140	150
11	–	121	132	143	154	165
12	–	–	144	156	168	180
13	–	–	–	169	182	195
14	–	–	–	–	196	210
15	–	–	–	–	–	225

En hexadécimal[1] :

	A	B	C	D	E	F
A	64	$6E$	78	82	$8C$	96
B	–	79	84	$8F$	$9A$	$A5$
C	–	–	90	$9C$	$A8$	$B4$
D	–	–	–	$A9$	$B6$	$C3$
E	–	–	–	–	$C4$	$D2$
F	–	–	–	–	–	$E1$

Pour s'épargner les 21 conversions, on peut remarquer que dans certains cas il suffit d'ajouter (ou de retirer) 1 pour passer d'une case à l'autre[2], et donc on ajoute 1 au résultat hexadécimal précédent.

L'opération peut commencer ![3]

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & D & E & C & A & D & E \\
\times & & & & & & F & A & D & E \\
\hline
 & & & C & 2^{\cancel{C}} & F^{\cancel{B}} & 1^{\cancel{9}} & 8^{\cancel{C}} & 2^{\cancel{C}} & 4 \\
 & & B & 5^{\cancel{C}} & 0^{\cancel{A}} & 4^{\cancel{8}} & D^{\cancel{B}} & 4^{\cancel{B}} & 6 & 0 \\
 & 8 & B^{\cancel{9}} & 3^{\cancel{7}} & E^{\cancel{6}} & C^{\cancel{8}} & A^{\cancel{8}} & C & 0 & 0 \\
D & 0^{\cancel{D}} & D^{\cancel{B}} & E^{\cancel{A}} & 3^{\cancel{D}} & 0^{\cancel{D}} & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
D & A^{\cancel{2}} & 5^{\cancel{2}} & 3^{\cancel{1}} & 5^{\cancel{2}} & 0^{\cancel{1}} & B^{\cancel{1}} & 8 & 8 & 4
\end{array}
$$

Question 2

La conversion est faite directement de la base 12 à la base 7. Pour ceux qui voudraient passer par le décimal, le principe est le même, sachant que le nombre est 2424258.

1. « Allez, on convertit ! On convertit ! » (Zakaria)
2. $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$
3. Après cette anesthésie générale…

$$\begin{array}{cccccc|c}
9 & 8 & A & B & 1 & 6 & 7 \\ \cline{7-7}
2 & 8 & & & & & 148502 \\
 & 4 & A & & & & \\
 & & 2 & B & & & \\
 & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 6 & \\
 & & & & & \mathbf{4} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 4 & 8 & 5 & 0 & 2 & 7 \\ \cline{7-7}
 & 2 & 8 & & & & 2476A \\
 & & 4 & 5 & & & \\
 & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & 6 & 2 & \\
 & & & & & \mathbf{4} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 4 & 7 & 6 & A & 7 \\ \cline{6-6}
 & 0 & 7 & & & 410B \\
 & & 0 & 6 & & \\
 & & & 6 & A & \\
 & & & & \mathbf{5} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
4 & 1 & 0 & B & 7 \\ \cline{5-5}
 & 0 & 0 & & 701 \\
 & & 0 & B & \\
 & & & \mathbf{4} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
7 & 0 & 1 & 7 \\ \cline{4-4}
0 & 0 & & 100 \\
 & 0 & 1 & \\
 & & \mathbf{1} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 7 \\ \cline{4-4}
 & 5 & 0 & 18 \\
 & & \mathbf{4} &
\end{array}$$

Et $\overline{18}^{12} = 7 \times 2$ reste 6, ce qui donne comme premier chiffre 2 et deuxième 6. En remontant dans l'ordre, on obtient les autres chiffres successivement, d'où la réponse $\overline{26414544}^{7}$.

Question 3

On décompose 219 soit par divisions successives soit par soustractions successives [4] : $219 = 128+64+16+8+2+1 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = \overline{0000000011011011}^2$.

Pour l'opposé, en complément à deux, on remplace les 1 par des 0 et vice-versa, puis on ajoute 1 [5] :
$-219 = \overline{1111111100100101}^2$.

Pour l'élevation au carré (donnant 47961, qui se représente comme $47691 - 65536 = -17525$ car cela dépasse $2^15 - 1 = 32767$), on peut convertir -17525 en tant qu'entier en complément à deux, ou 47691 en tant qu'entier sur 16 bits, ou multiplier $\overline{1111111100100101}^2$ par lui-même en tant qu'entier en complément à deux. Pour cette élevation au carré, tous les bits au-delà du 16$^{\text{e}}$ sont effacés. Sans entrer dans les détails, la réponse est $\overline{1011101101011001}^2$.

Question 4

Pour rappel, l'écriture en virgule flottante sur 16 bits utilise un bit de signe, puis 5 bits d'exposant et finalement 10 bits de mantisse.

Pour s'épargner des chiffres inutiles, on tronque l'écriture décimale de π à $3,1415926535$. La partie entière est $\overline{11}^2$, on cherche la partie fractionnaire en binaire par multiplications par deux successives des chiffres significatifs retenus.

On s'autorise l'abus d'écrire une égalité alors que d'une ligne à l'autre on efface le dernier chiffre dont on sait qu'il n'a plus d'influence sur le résultat (une retenue dans la multiplication par 2 ne peut plus rien modifier d'important).

4. méthode fonctionnant quand on connaît les puissances de 2 jusqu'à un certain point

5. c'est plus facile pour les nombres impairs où il n'y a pas de retenue, et le nombre de retenues est d'ailleurs l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre

$$\begin{array}{lrcll}
2\times & 0,1415926535 & = & \mathbf{0} & ,283185307 \\
2\times & 0,283185307 & = & \mathbf{0} & ,56637061 \\
2\times & 0,56637061 & = & \mathbf{1} & ,1327412 \\
2\times & 0,1327412 & = & \mathbf{0} & ,265482 \\
2\times & 0,265482 & = & \mathbf{0} & ,53096 \\
2\times & 0,53096 & = & \mathbf{1} & ,0619 \\
2\times & 0,0619 & = & \mathbf{0} & ,123 \\
2\times & 0,123 & = & \mathbf{0} & ,24 \\
2\times & 0,24 & = & \mathbf{0} & ,4
\end{array}$$

L'exposant est 1, ce qui se voit au niveau de la partie entière. Il se représente sur 5 bits comme $1 + 2^{5-1} - 1$, soit $\overline{10000}^2$. La mantisse commence par le deuxième 1 de la partie entière (pas le premier, qui est implicite), elle est donc de $\overline{1001001000}$.

La représentation finale est alors 0 10000 1001001000.

Question 5

Le plus petit nombre strictement positif représentable en virgule flottante (hors valeurs exceptionnelles) sur 32 bits s'écrit 0 00000001 $0\ldots0$ et correspond à 2^{-126}, le plus grand nombre s'écrit 0 11111110 $1\ldots1$ et correspond à $2^{127} \times 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-23} = 2^{127} \times (2 - 2^{-23})$. Le produit des deux fait donc $2 \times (2 - 2^{-23}) = 4 - 2^{-22}$.

Question subsidiaire

Les couleurs ne sont pas anodines : l'initiale d'orange est celle de « oui », celle de noir est « non ». En écrivant l'initiale de l'équipe remportant chaque question, on obtient une représentation binaire ($O = 1$ et $N = 0$) du numéro du seul joueur ayant été cinq fois dans l'équipe gagnante. En effet, la numérotation étant effectuée de cette façon :

31	30	29	28	27	26	25	24
23	22	21	20	19	18	17	16
15	14	13	12	11	10	9	8
7	6	5	4	3	2	1	0

et à chaque tour, chaque joueur était dans l'équipe correspondant au chiffre des n-aines de son numéro en binaire, où n était le nombre de points à gagner. Par exemple, le joueur à la place $14 = \overline{01110}^2$ était dans l'équipe noire au premier tour, orange aux trois tours suivants et noire au dernier tour. Il n'a par ailleurs jamais été dans la même équipe que le joueur à la place $17 = \overline{10001}^2$, ce qui correspond à $31 - 14$ donc au chiffre obtenu en permutant les 1 et les 0. Géométriquement, c'est aussi la place qui est symétrique par rapport au point au centre de la classe, ce qui se remarque facilement car à chaque tour le symétrique d'une place par rapport à ce point était de couleur différente.

Concernant la question finale, la réponse est oui sans la contrainte d'avoir des équipes de 16 (en trois fois, quel que soit le nombre de participants : un contre tous, un autre contre tous, les deux isolés dans une même équipe, voire en une fois si une équipe est vide). En revanche, quand les équipes sont nécessairement de taille 16, le mouvement proposé est le plus équilibré (à égalité avec d'autres). On peut pour s'en convaincre introduire une relation binaire « être au moins une fois dans la même équipe » et constater que d'un tour à l'autre il est de plus en plus difficile d'ajouter beaucoup d'éléments dans la relation.